

Меняя в этих интегралах порядок интегрирования, мы и придем к искомому уравнению Фредгольма

$$u(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b N(x, t) u(t) dt, \quad (7)$$

где

$$u(x) = F[y(x)]; \quad \psi(x) = F[\varphi(x)] + \sum_{i=1}^n C_i F[y_i(x)], \quad (8)$$

$$N(x, t) = \begin{cases} \int_t^a \sum_{\alpha=0}^m K_{\alpha}(x, \eta) H_{\eta}^{(\alpha)}(\eta, t) d\eta, & t \leq x_0 \\ \int_t^b \sum_{\alpha=0}^m K_{\alpha}(x, \eta) H_{\eta}^{(\alpha)}(\eta, t) d\eta, & t \geq x_0, \end{cases}$$

причем $H_{\eta}^{(k)}(\eta, t)$ есть производная от $H(\eta, t)$ по η k -го порядка. В частности, если $x_0 = a$, то

$$N(x, t) = \int_t^b \sum_{\alpha=0}^m K_{\alpha}(x, \eta) H_{\eta}^{(\alpha)}(\eta, t) d\eta.$$

Из самого вывода уравнения (7) следует, что если $u(x)$ есть решение уравнения (4), то $F[u(x)]$ есть решение уравнения (7). Обратно, если $u_0(x)$ есть решение интегрального уравнения (7) при некотором значении λ , то уравнение (4) при том же значении λ имеет решение

$$u(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x) + \varphi(x) + \lambda \int_{x_0}^x H(x, \eta) u_0(\eta) d\eta. \quad (9)$$

В самом деле, для функции (9)

$$F[u(x)] = \psi(x) + \lambda \int_a^b N(x, t) u_0(t) dt = u_0(x).$$

Следовательно, подстановка этой функции в правую часть уравнения (4) под знак интеграла дает выражение правой части равенства (9). Это значит, что функция (9) обращает уравнение (4) в тождество.

Учитывая полученные результаты, а также принимая во внимание лемму 1, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (1) с начальными условиями (2) было разрешимо для некоторого значения λ , необходимо и достаточно, чтобы для этого значения λ было разрешимо интегральное уравнение (7).

Отсюда непосредственно вытекает теорема 2.

Теорема 2. Если λ не является собственным числом интегрального уравнения (7), то интегро-дифференциальное уравнение (1) с начальными условиями (2) имеет единственное решение (9), в котором постоянные $C_1, \dots, C_n$ определяются из условия (5).

2. Рассмотрим теперь однородное интегро-дифференциальное уравнение

$$L[u(x)] = \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^m K_{\alpha}(x, t) u^{(\alpha)}(t) dt \quad (10)$$

с нулевыми начальными условиями.